Exercice 1

Pour tout entier naturel n , on pose

$$I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$$

1) Calculer

$$I_0 = \int_1^e x^2 dx$$

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel n, on a

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$

4) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$I_n \geq 0$$

5) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

6) Montrer que la suite (I_n) est convergente.

7) A l'aide de la question 3), montrer que pour tout entier naturel n,

$$I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$$

8) Déterminer la limite l de la suite (I_n).

Exercice 2

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1,\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1, +\infty[$, $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

   Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1,\ +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
		Affecter à u la valeur $u + \dfrac{1}{i}$.
Sortie :	Afficher u.

   Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.
2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0, 578	0,577

   À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.
Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où f est la fonction définie dans la partie **A.**

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. **a.** Soit k un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geqslant 0.$

En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}.$

Démontrer l'inégalité $\quad \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k} \quad (1).$

b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par 1, 2, ..., n et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n, $\quad u_n \geqslant 0.$

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.